Didaktik : Jurnal Ilmiah PGSD FKIP Universitas Mandiri,
ISSN Cetak : 2477-5673 ISSN Online : 2614-722X
Volume 12 Nomor 04, Desember 2026

ANALISIS PEMBUKTIAN MATEMATIS PADA PERNYATAAN TENTANG BILANGAN GENAP DAN BILANGAN GANJIL

[1]Asyfa Rahma Muzdalifah, [2]Diningrat, [3]Fitriana, [4]Ratna Juwita, [5]Rifa Aisyah,
[6]Widya Meta Loka, [7]Muhammad Win Afgani
[1234567]Universitas Islam Negeri Raden Fatah Palembang
Juitaratna497@gmail.com, diningrattt526@gmail.com

ABSTRACT

Even and odd numbers are fundamental concepts in mathematics that play an important role in understanding the properties of integers. Understanding these two types of numbers involves not only identifying whether a number is even or odd but also constructing and proving mathematical statements logically and systematically. This article aims to analyze mathematical proofs of statements related to the properties of even and odd numbers through an algebraic approach. The method used is a literature review, which involves examining relevant sources concerning even and odd numbers, algebraic representations, and mathematical proof techniques. An even number can be expressed in the form (2n), whereas an odd number can be expressed in the form (2n+1), where (n) is an integer. These representations serve as the basis for analyzing number properties through addition, subtraction, and multiplication. The analysis shows that the sum of two even numbers is even, the sum of an even number and an odd number is odd, and the sum of two odd numbers is even. This can be demonstrated by the equation ((2m+1)+(2n+1)=2(m+n+1)). Furthermore, the product of two odd numbers is odd, as shown by the equation ((2m+1)(2n+1)=2(2mn+m+n)+1). This equation indicates that the product can be expressed in the form (2k+1), where (k) is an integer. Therefore, algebraic proof can help explain the properties of even and odd numbers In a more structured manner while developing accuracy in constructing equations, using mathematical symbols, and drawing conclusions based on the definitions and properties of integers.

***Keywords**: even numbers, odd numbers, mathematical proof, algebraic representation, integers.*

ABSTRAK

Bilangan genap dan bilangan ganjil merupakan konsep dasar dalam matematika yang memiliki peranan penting dalam memahami berbagai sifat bilangan bulat. Pemahaman terhadap kedua jenis bilangan tersebut tidak hanya berkaitan dengan kemampuan menentukan suatu bilangan sebagai bilangan genap atau ganjil, tetapi juga mencakup kemampuan menyusun dan membuktikan pernyataan matematika secara logis dan sistematis. Artikel ini bertujuan untuk menganalisis pembuktian

matematis pada berbagai pernyataan yang berkaitan dengan sifat bilangan genap dan bilangan ganjil melalui pendekatan aljabar. Metode yang digunakan adalah studi literatur, yaitu dengan mengkaji berbagai sumber yang relevan mengenai konsep bilangan genap dan ganjil, representasi aljabar, serta teknik pembuktian matematis. Bilangan genap dapat dinyatakan dalam bentuk (2n), sedangkan bilangan ganjil dapat dinyatakan dalam bentuk (2n+1), dengan (n) merupakan bilangan bulat. Kedua bentuk tersebut digunakan sebagai dasar untuk menganalisis sifat bilangan dalam operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian. Hasil analisis menunjukkan bahwa penjumlahan dua bilangan genap menghasilkan bilangan genap, penjumlahan bilangan genap dan bilangan ganjil menghasilkan bilangan ganjil, sedangkan penjumlahan dua bilangan ganjil menghasilkan bilangan genap. Hal tersebut dapat dibuktikan melalui persamaan ((2m+1)+(2n+1)=2(m+n+1)). Selain itu, perkalian dua bilangan ganjil menghasilkan bilangan ganjil, sebagaimana ditunjukkan oleh persamaan ((2m+1)(2n+1)=2(2mn+m+n)+1). Persamaan tersebut menunjukkan bahwa hasil perkalian dapat dinyatakan dalam bentuk (2k+1), dengan (k) merupakan bilangan bulat. Dengan demikian, pembuktian menggunakan pendekatan aljabar dapat membantu menjelaskan sifat-sifat bilangan genap dan ganjil secara lebih terstruktur, sekaligus melatih ketelitian dalam menyusun persamaan, menggunakan simbol matematika, dan menarik kesimpulan berdasarkan definisi serta sifat bilangan bulat.

Kata Kunci: bilangan genap, bilangan ganjil, pembuktian matematis, Representasi aljabar, bilangan bulat.

A. Pendahuluan

Matematika merupakan ilmu yang tidak hanya berkaitan dengan perhitungan, tetapi juga menekankan proses berpikir logis, sistematis, kritis, dan terstruktur dalam menyelesaikan permasalahan. Salah satu aspek penting dalam matematika adalah pembuktian matematis, yaitu proses untuk menunjukkan bahwa suatu pernyataan benar berdasarkan definisi, sifat, dan aturan matematika yang dapat dipertanggungjawabkan. Pembuktian memiliki peranan penting dalam membangun dan menjelaskan pengetahuan matematika karena suatu pernyataan tidak cukup hanya didukung oleh contoh atau hasil perhitungan, tetapi perlu disertai alasan yang logis. Rocha (2019) menjelaskan bahwa pembuktian berfungsi untuk mengembangkan, menetapkan, dan mengomunikasikan pengetahuan matematika. Oleh karena itu, kemampuan memahami pembuktian menjadi bagian penting

dalam mempelajari matematika secara lebih mendalam. Pembuktian matematis juga berkaitan erat dengan kemampuan penalaran. Melalui kegiatan pembuktian, seseorang belajar menghubungkan definisi dengan sifat-sifat matematika, menyusun argumen secara berurutan, serta menarik kesimpulan berdasarkan alasan yang tepat. Miyazaki et al. (2017) membahas pentingnya pemahaman terhadap struktur pembuktian deduktif, sedangkan Herizal et al. (2020) menunjukkan bahwa kemampuan memahami dan menyusun bukti matematis merupakan bagian penting dari penalaran matematika. Hal tersebut menunjukkan bahwa pembuktian tidak hanya menuntut kemampuan melakukan operasi hitung, tetapi juga pemahaman terhadap hubungan logis antara informasi yang diketahui dan pernyataan yang hendak dibuktikan. Salah satu materi dasar yang dapat digunakan untuk mempelajari pembuktian matematis adalah bilangan genap dan bilangan ganjil. Kedua jenis bilangan ini

memiliki definisi yang sederhana, tetapi dapat digunakan untuk menjelaskan berbagai konsep pembuktian melalui pendekatan aljabar. Bilangan genap merupakan bilangan bulat yang dapat dinyatakan dalam bentuk 2n, sedangkan bilangan ganjil dapat dinyatakan dalam bentuk 2n + 1, dengan n merupakan bilangan bulat. Representasi tersebut memungkinkan suatu bilangan dinyatakan secara umum sehingga sifat-sifatnya dapat dibuktikan tanpa harus memeriksa setiap bilangan satuper satu. Hammack (2018) menjelaskan berbagai metode pembuktian matematika yang menggunakan definisi, bentuk aljabar, dan penalaran logis untuk membuktikan pernyataan secara sistematis.

Dalam penerapannya, sifat bilangan genap dan ganjil dapat dikaji melalui operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian. Sebagai contoh, jumlah dua bilangan ganjil dapat dibuktikan selalu menghasilkan bilangan genap. Apabila dua bilangan ganjil dinyatakan sebagai 2m + 1 dan 2n + 1, dengan m dan n merupakan bilangan bulat, maka penjumlahannya adalah:

$$(2m + 1) + (2n + 1)$$
$$= 2m + 2n + 2$$
$$= 2(m + n + 1)$$

Karena m + n + 1 merupakan bilangan bulat, hasil penjumlahan tersebut berbentuk 2k, sehingga termasuk bilangan genap. Contoh tersebut memperlihatkan bahwa pembuktian menggunakan aljabar dapat memberikan alasan yang berlaku secara umum, bukan sekadar menunjukkan kebenaran melalui beberapa contoh numerik. Pendekatan serupa dapat diterapkan untuk membuktikan sifat pengurangan dan perkalian bilangan genap serta ganjil.

Meskipun konsep bilangan genap dan ganjil tergolong sederhana, proses pembuktiannya tetap membutuhkan ketelitian dalam menggunakan definisi, simbol, operasi aljabar, dan penarikan kesimpulan. Kesalahan dalam memilih tanda operasi atau menyederhanakan persamaan dapat menyebabkan hasil pembuktian menjadi tidak tepat. Faizah et al. (2020) menjelaskan bahwa pembuktian matematis melibatkan proses berpikir logis dan analitis. Dengan demikian, mempelajari pembuktian pada bilangan genap dan ganjil dapat menjadi sarana untuk memahami bagaimana suatu pernyataan matematika dibangun dan dibuktikan secara benar. Selain menggunakan pembuktian langsung, suatu pernyataan matematika juga dapat dikaji melalui metode pembuktian tidak langsung, seperti kontraposisi dan kontradiksi. Pemilihan metode pembuktian perlu disesuaikan dengan bentuk pernyataan yang akan dibuktikan serta hubungan logis yang ingin ditunjukkan.

Levin (2024) membahas logika simbolik dan berbagai metode pembuktian dalam matematika diskrit yang dapat digunakan untuk memahami struktur argumen matematika. Penggunaan beberapa metode tersebut memungkinkan sifat-sifat bilangan genap dan ganjil dianalisis dari sudut pandang yang berbeda, tetapi tetap berdasarkan prinsip logika matematika.

Berdasarkan uraian tersebut, pembahasan mengenai analisis pembuktian matematis pada pernyataan tentang bilangan genap dan bilangan ganjil penting dilakukan untuk memperjelas hubungan antara definisi bilangan, operasi aljabar, dan metode pembuktian. Artikel ini bertujuan untuk menganalisis berbagai pernyataan mengenai sifat bilangan genap dan ganjil serta menjelaskan proses pembuktiannya

melalui pendekatan aljabar dan penalaran logis. Pembahasan difokuskan pada penggunaan definisi bilangan genap dan ganjil, pembuktian sifat kedua bilangan dalam operasi aritmetika, serta penerapan metode pembuktian langsung, kontraposisi, dan kontradiksi. Melalui pembahasan tersebut, diharapkan pembaca dapat memahami bahwa kebenaran suatu pernyataan matematika perlu didukung oleh langkah pembuktian yang tepat, sistematis, dan dapat dipertanggungjawabkan.

B. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur (literature review), yaitu Metode penelitian yang dilakukan dengan mengumpulkan, membaca, mempelajari, Dan menganalisis berbagai sumber pustaka yang relevan dengan topik penelitian. Metode ini digunakan untuk mengkaji konsep bilangan genap dan bilangan ganjil Serta memahami proses pembuktian matematis terhadap sifat-sifat kedua jenis Bilangan tersebut. Sumber pustaka yang digunakan berupa buku matematika, artikel Ilmiah, dan referensi lain yang berkaitan dengan logika matematika, penalaran, serta Metode pembuktian matematis.

Pengumpulan data dilakukan melalui penelusuran dan pengkajian sumber-Sumber yang membahas definisi bilangan genap dan bilangan ganjil, sifat-sifat Operasi aritmetika, serta metode pembuktian langsung dan tidak langsung. Informasi Yang diperoleh dari sumber-sumber tersebut kemudian dipilih berdasarkan Kesesuaiannya dengan tujuan penelitian. Selanjutnya, informasi yang relevan Digunakan sebagai landasan dalam menganalisis pernyataan matematika mengenai Bilangan genap dan bilangan ganjil.

Analisis data dilakukan secara deskriptif dengan menggunakan pendekatan Aljabar dan penalaran logis. Setiap pernyataan mengenai sifat bilangan genap dan Bilangan ganjil dianalisis berdasarkan definisinya. Bilangan genap dinyatakan dalam bentuk 2n, sedangkan bilangan ganjil dinyatakan dalam bentuk 2n + 1, dengan n merupakan bilangan bulat. Bentuk aljabar tersebut digunakan untuk memeriksa dan Membuktikan sifat-sifat bilangan melalui operasi

penjumlahan, pengurangan, dan perkalian.

Proses analisis juga mencakup pemeriksaan terhadap ketepatan langkah-langkah pembuktian, penggunaan simbol matematika, dan penarikan kesimpulan. Apabila suatu pernyataan dianalisis menggunakan metode pembuktian tidak langsung, prosesnya dikaji berdasarkan prinsip logika matematika yang sesuai. Hasil analisis memudian disusun secara sistematis untuk menjelaskan apakah suatu pernyataan dapat dibuktikan benar berdasarkan definisi, operasi aljabar, dan penalaran matematis yang digunakan.

C.Hasil Penelitian dan Pembahasan

Konsep Dasar Bilangan Genap dan Bilangan Ganjil :

Berdasarkan kajian literatur dan analisis terhadap konsep pembuktian matematis, bilangan genap dan bilangan ganjil merupakan konsep dasar yang dapat digunakan untuk memahami bagaimana suatu pernyataan matematika dibuktikan secara logis. Meskipun kedua konsep tersebut telah dipelajari sejak tingkat sekolah dasar, sifat-sifatnya dapat dikembangkan menjadi berbagai bentuk pembuktian yang melibatkan definisi, operasi aljabar, dan penalaran matematis. Oleh karena itu, pembahasan mengenai bilangan genap dan bilangan ganjil tidak hanya berfokus pada pengelompokan bilangan, tetapi juga pada alasan matematis yang mendasari sifat-sifat tersebut.

Bilangan genap adalah bilangan bulat yang dapat dinyatakan sebagai dua kali suatu bilangan bulat. Secara umum, bilangan genap dapat ditulis dalam bentuk 2n, dengan n merupakan anggota himpunan bilangan bulat. Contohnya adalah -6, -4, -2, 0, 2, 4, dan 6. Setiap bilangan tersebut dapat dibagi dua tanpa menghasilkan sisa. Sebagai contoh, bilangan 8 dapat dinyatakan sebagai 2 × 4, sedangkan bilangan -6 dapat dinyatakan sebagai 2 × (-3). Hal ini menunjukkan bahwa definisi bilangan genap juga berlaku untuk bilangan bulat negatif dan nol. Sementara itu, bilangan ganjil adalah bilangan bulat yang dapat dinyatakan dalam bentuk 2n + 1, dengan n merupakan bilangan bulat. Contohnya adalah -5, -3, -1, 1, 3, dan 5. Sebagai contoh, bilangan 7 dapat ditulis sebagai 2 × 3 + 1, sedangkan bilangan -3 dapat ditulis sebagai 2 × (-2) + 1. Dengan demikian, bilangan ganjil merupakan

bilangan bulat yang apabila dibagi dua akan menyisakan satu. Kedua definisi tersebut menjadi dasar utama dalam pembuktian matematis.

Penggunaan variabel n, m, atau k memungkinkan suatu pernyataan dinyatakan secara umum. Misalnya, untuk membuktikan bahwa jumlah dua bilangan genap selalu genap, tidak perlu memeriksa seluruh pasangan bilangan genap. Cukup dengan menyatakan kedua bilangan tersebut dalam bentuk umum, kemudian menunjukkan bahwa hasil penjumlahannya tetap berbentuk 2k.

Dalam pembuktian, variabel yang digunakan harus merupakan bilangan bulat agar sesuai dengan definisi bilangan genap dan ganjil. Jika suatu bilangan dinyatakan sebagai 2n, maka n harus merupakan bilangan bulat. Demikian pula, jika suatu bilangan dinyatakan sebagai 2n + 1, maka n juga harus merupakan bilangan bulat. Ketentuan ini penting karena kesimpulan pembuktian bergantung pada bentuk umum tersebut.

Hasil Analisis Sifat Bilangan Genap dan Bilangan Ganjil :

Hasil analisis menunjukkan bahwa sifat bilangan genap dan bilangan ganjil dapat dipelajari melalui operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, serta perpangkatan dengan pangkat bulat positif. Setiap operasi dapat menghasilkan sifat yang berbeda bergantung pada jenis bilangan yang terlibat.

Pada operasi penjumlahan, dua bilangan genap menghasilkan bilangan genap, dua bilangan ganjil juga menghasilkan bilangan genap, sedangkan penjumlahan bilangan genap dan bilangan ganjil menghasilkan bilangan ganjil.

Pada operasi pengurangan, dua bilangan dengan jenis yang sama menghasilkan bilangan genap, sedangkan bilangan dengan jenis berbeda menghasilkan

bilangan ganjil. Adapun pada operasi perkalian, hasil perkalian akan genap apabila sekurang-kurangnya salah satu faktornya genap. Jika kedua faktor merupakan bilangan ganjil, hasil perkaliannya tetap ganjil.

Hasil tersebut menunjukkan bahwa sifat genap dan ganjil tidak ditentukan oleh besar atau kecilnya bilangan, tetapi oleh bentuk aljabar dan sifat keterbagian bilangan tersebut. Oleh karena itu, pembuktian perlu didasarkan pada definisi dan manipulasi aljabar yang benar, bukan

hanya pada beberapa contoh perhitungan.

Pembuktian Sifat Bilangan Genap dan Bilangan Ganjil pada Operasi Penjumlahan :

1. Jumlah dua bilangan genap adalah bilangan genap. Pernyataan pertama yang dianalisis adalah jumlah dua bilangan genap selalu menghasilkan bilangan genap. Untuk membuktikan pernyataan tersebut, misalkan dua bilangan genap dinyatakan sebagai 2m dan 2n, dengan m dan n merupakan bilangan bulat. Jumlah kedua bilangan tersebutadalah: 2m + 2n = 2(m + n) Karena m dan n merupakan bilangan bulat, maka m + n juga merupakan bilangan bulat. Misalkan m + n = k, sehingga hasil penjumlahannya dapat dinyatakan sebagai 2k. Berdasarkan definisi bilangan genap, bentuk 2k menunjukkan bilangan genap.Dengan demikian, terbukti bahwa jumlah dua bilangan genap selalu menghasilkan bilangan genap. Pembuktian ini menggunakan metode pembuktian langsung karena kesimpulan diperoleh secara langsung dari definisi bilangan genap dan sifat operasi aljabar.
2. Jumlah dua bilangan ganjil adalah bilangan genap Pernyataan berikutnya adalah jumlah dua bilangan ganjil selalu menghasilkan bilangan genap. Misalkan dua bilangan ganjil dinyatakan sebagai 2m + 1 dan 2n + 1, dengan m dan n merupakan bilangan bulat. Penjumlahan kedua bilangan tersebut dapat dituliskan sebagai:

   (2m + 1) + (2n + 1)
   = 2m + 2n + 2
   = 2(m + n + 1)

   Karena m + n + 1 merupakan bilangan bulat, maka hasil penjumlahan tersebut berbentuk 2k. Bentuk tersebut memenuhi definisi bilangan genap.

   Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa jumlah dua bilangan ganjil selalu menghasilkan bilangan genap. Hasil ini juga dapat diamati melalui contoh, seperti 3 + 5 = 8. Namun, contoh tersebut hanya menunjukkan satu

keadaan, sedangkan pembuktian aljabar di atas menunjukkan bahwa pernyataan berlaku untuk seluruh pasangan bilangan ganjil.

3. Jumlah bilangan genap dan bilangan ganjil adalah bilangan ganjil Pernyataan ketiga adalah penjumlahan bilangan genap dengan bilangan ganjil selalu menghasilkan bilangan ganjil. Misalkan bilangan genap dinyatakan sebagai 2m dan bilangan ganjil dinyatakan sebagai 2n + 1. Penjumlahan keduanya adalah:

   2m + (2n + 1)
   = 2m + 2n + 1
   = 2(m + n) + 1

   Karena m + n merupakan bilangan bulat, hasil penjumlahan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk 2k + Bentuk tersebut sesuai dengan definisi bilangan ganjil. Dengan demikian, jumlah bilangan genap dan bilangan ganjil selalu menghasilkan bilangan ganjil. Sebagai contoh, 4 + 7 = 11. Meskipun contoh tersebut sesuai dengan hasil pembuktian, dasar utama kesimpulan tetap terletak pada bentuk aljabar yang berlaku secara umum.

4. Analisis hasil pembuktian penjumlahan ketiga pembuktian tersebut menunjukkan bahwa hasil penjumlahan dipengaruhi oleh jenis bilangan yang dijumlahkan. Penjumlahan dua bilangan genap menghasilkan bentuk 2k, begitu pula penjumlahan dua bilangan ganjil. Sebaliknya, penjumlahan bilangan genap dan bilangan ganjil menghasilkan bentuk 2k + 1. Perbedaan tersebut terjadi karena bilangan ganjil memiliki tambahan satu pada bentuk umumnya. Ketika dua bilangan ganjil dijumlahkan, tambahan satu dari masing-masing bilangan menghasilkan dua, sehingga dapat digabungkan ke dalam faktor dua. Namun, ketika hanya satu bilangan ganjil yang dijumlahkan dengan bilangan genap, tambahan satu tersebut tetap ada sehingga hasilnya berbentuk bilangan ganjil. Analisis ini memperlihatkan bahwa

penggunaan bentuk umum bilangan membantu menjelaskan alasan matematis di balik suatu sifat. Dengan demikian, pembuktian tidak hanya menunjukkan hasil akhir, tetapi juga memberikan penjelasan mengenai proses terbentuknya hasil tersebut.

Pembuktian Sifat Bilangan Genap dan Bilangan Ganjil pada Operasi Pengurangan:

1. Selisih dua bilangan genap adalah bilangan genap Misalkan dua bilangan genap dinyatakan sebagai 2m dan 2n, dengan m dan n merupakan bilangan bulat. Selisih kedua bilangan tersebut adalah: 2m - 2n = 2(m - n) Karena m - n merupakan bilangan bulat, hasil pengurangan tersebut berbentuk 2k. Oleh karena itu, selisih dua bilangan genap selalu menghasilkan bilangan genap. Sebagai contoh, 12 - 4 = 8. Kedua bilangan yang dikurangkan merupakan bilangan genap dan hasilnya juga genap. Akan tetapi, pembuktian aljabar menunjukkan bahwa sifat ini berlaku secara umum, termasuk ketika hasil pengurangan bernilai negatif.
2. Selisih dua bilangan ganjil adalah bilangan genap Misalkan dua bilangan ganjil dinyatakan sebagai 2m + 1 dan 2n + 1. Selisih kedua bilangan tersebut adalah:
   (2m + 1) - (2n + 1)
   = 2m + 1 - 2n – 1
   = 2m - 2n
   = 2(m - n)
   Karena m - n merupakan bilangan bulat, hasil pengurangan tersebut berbentuk 2k. Dengan demikian, selisih dua bilangan ganjil selalu menghasilkan bilangan genap. Contohnya, 9 - 5 = 4. Hasil pengurangan tersebut merupakan bilangan genap. Secara umum, sifat ini terjadi karena tambahan satu pada kedua bilangan ganjil saling menghilangkan ketika dilakukan pengurangan.
3. Pengurangan bilangan genap dengan bilangan ganjil menghasilkan bilangan ganjil Misalkan bilangan genap dinyatakan sebagai 2m dan

bilangan ganjil dinyatakan sebagai 2n + 1. Pengurangannya adalah:

2m - (2n + 1)

= 2m - 2n – 1

= 2(m - n - 1) + 1 Karena m - n - 1 merupakan bilangan bulat, hasilnya berbentuk 2k + 1. Berdasarkan definisi bilangan ganjil, dapat disimpulkan bahwa pengurangan bilangan genap dengan bilangan ganjil menghasilkan bilangan ganjil. Sebagai contoh, 8 - 3 = 5. Hasil pengurangan tersebut merupakan bilangan ganjil.

4. Pengurangan bilangan ganjil dengan bilangan genap menghasilkan bilangan ganjil Misalkan bilangan ganjil dinyatakan sebagai 2m + 1 dan bilangan genap dinyatakan sebagai 2n. Pengurangannya adalah:

   (2m + 1) - 2n

   = 2m - 2n + 1

   = 2(m - n) + 1

   Karena m - n merupakan bilangan bulat, hasil pengurangan tersebut berbentuk 2k + 1. Dengan demikian, penguranga bilangan ganjil dengan bilangan genap menghasilkan bilangan ganjil. Sebagai contoh, 11 - 4 = 7. Hasilnya merupakan bilangan ganjil.

5. Analisis hasil pembuktian pengurangan

   Hasil pembuktian menunjukkan bahwa pengurangan dua bilangan dengan jenis yang sama menghasilkan bilangan genap, sedangkan pengurangan dua bilangan dengan jenis berbeda menghasilkan bilangan ganjil. Sifat ini berlaku baik untuk bilangan positif, bilangan negatif, maupun nol selama bilangan yang digunakan merupakan bilangan bulat. Hal yang perlu diperhatikan dalam pembuktian pengurangan adalah penggunaan tanda kurung dan tanda negatif. Misalnya, pada bentuk 2m - (2n + 1), tanda negatif harus diterapkan pada seluruh bentuk di dalam kurung sehingga diperoleh 2m - 2n 1.

Kesalahan dalam menghilangkan tanda kurung dapat menyebabkan bentuk aljabar dan kesimpulan yang diperoleh menjadi tidak tepat.

Pembuktian Sifat Bilangan Genap dan Bilangan Ganjil pada Operasi Perkalian:

1. Hasil kali dua bilangan genap adalah bilangan genap Misalkan dua bilangan genap dinyatakan sebagai 2m dan 2n. Hasil perkalian kedua bilangan tersebut adalah:
   (2m)(2n) = 4mn
   = 2(2mn)
   Karena 2mn merupakan bilangan bulat, hasil perkalian tersebut berbentuk 2k. Oleh karena itu, hasil kali dua bilangan genap selalu menghasilkan bilangan genap.Sebagai contoh, 4 × 6 = 24. Hasil perkalian tersebut merupakan bilangan genap. Pembuktian aljabar menjelaskan bahwa sifat ini berlaku untuk seluruh pasangan bilangan genap.
2. Hasil kali bilangan genap dan bilangan ganjil adalah bilangan genap Misalkan bilangan genap dinyatakan sebagai 2m dan bilangan ganjil dinyatakan sebagai 2n + 1. Hasil perkaliannya adalah:
   (2m)(2n + 1)
   = 4mn + 2m
   = 2(2mn + m)
   Karena 2mn + m merupakan bilangan bulat, hasil perkalian tersebut berbentuk 2k. Dengan demikian, hasil kali bilangan genap dan bilangan ganjil selalu menghasilkan bilangan genap. Sebagai contoh, 6 × 5 = 30. Hasilnya merupakan bilangan genap. Sifat ini juga berlaku apabila bilangan genap merupakan faktor kedua, sebab perkalian bilangan bulat bersifat komutatif. Dengan kata lain, 5 × 6 juga menghasilkan 30.
3. Hasil kali dua bilangan ganjil adalah bilangan ganjil Misalkan dua bilangan ganjil dinyatakan sebagai 2m + 1 dan 2n + 1. Hasil perkalian keduanya adalah:
   (2m + 1)(2n + 1)
   = 4mn + 2m + 2n + 1 = 2(2mn + m + n) + 1 Karena 2mn + m + n merupakan bilangan

bulat, hasil perkalian tersebut berbentuk 2k + 1. Oleh karena itu, hasil kali dua bilangan ganjil selalu menghasilkan bilangan ganjil. Sebagai contoh, 3 × 7 = 21. Hasil perkalian tersebut merupakan bilangan ganjil. Melalui pembuktian aljabar, sifat ini dapat dinyatakan berlaku untuk seluruh pasangan bilangan ganjil, bukan hanya untuk contoh tertentu.

4. Analisis hasil pembuktian perkalian berbeda dengan penjumlahan dan pengurangan, sifat perkalian menunjukkan bahwa satu faktor genap sudah cukup untuk menjamin hasil perkalian genap. Hal ini dapat dipahami karena faktor genap memiliki bentuk 2m. Ketika dikalikan dengan bilangan bulat lainnya, faktor dua tetap dapat dikeluarkan dari hasil perkalian sehingga hasilnya tetap berbentuk 2k. Sebaliknya, perkalian dua bilangan ganjil menghasilkan bentuk 2k + 1. Hal ini disebabkan hasil pengembangan aljabar menghasilkan suku-suku genap ditambah satu. Jumlah beberapa suku genap tetap genap, dan ketika ditambah satu, hasilnya menjadi ganjil. Dengan demikian, pembuktian pada operasi perkalian memperlihatkan bahwa sifat bilangan genap dan ganjil dapat dianalisis melalui faktor-faktor yang menyusun bentuk aljabar. Pemahaman tersebut dapat membantu dalam memecahkan permasalahan matematika yang lebih kompleks.

Pembuktian Sifat Bilangan Genap dan Bilangan Ganjil pada Operasi Perpangkatan

1. Pangkat positif bilangan genap menghasilkan bilangan genap Misalkan suatu bilangan genap dinyatakan sebagai 2m dan dipangkatkan dengan bilangan bulat positif r. Bentuk perpangkatannya adalah: (2m)^r = 2^r × m^r Karena r merupakan bilangan bulat positif, bentuk tersebut dapat ditulis

sebagai: (2m)^r = 2 × (2^(r – 1 × m^r) Bagian di dalam tanda kurung merupakan bilangan bulat. Oleh karena itu, hasil perpangkatan dapat dinyatakan dalam bentuk 2k dan termasuk bilangan genap. Sebagai contoh: 4^2 = 4 × 4 = 16 16 merupakan bilangan genap. Dengan demikian, pangkat bulat positif dari bilangan genap tetap menghasilkan bilangan genap.

2. Pangkat positif bilangan ganjil menghasilkan bilangan ganjil Misalkan suatu bilangan ganjil dinyatakan sebagai 2m + 1. Kuadrat bilangan tersebut adalah: (2m + 1)^2 = (2m + 1)(2m + 1) = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1 Karena 2m^2 + 2m merupakan bilangan bulat, hasil kuadrat tersebut berbentuk 2k + 1. Dengan demikian, kuadrat bilangan ganjil selalu ganjil. Sifat ini dapat diperluas ke pangkat bulat positif lainnya. Perpangkatan merupakan perkalian berulang, sedangkan hasil kali dua bilangan ganjil selalu ganjil. Oleh karena itu, pangkat bulat positif dari bilangan ganjil tetap menghasilkan bilangan ganjil. Hasil pembahasan ini menunjukkan bahwa sifat genap dan ganjil tetap terjaga pada operasi perpangkatan dengan pangkat bulat positif. Namun, pembahasan ini tidak mencakup pangkat nol atau pangkat negatif karena keduanya memerlukan ketentuan tambahan mengenai nilai bilangan dan definisi perpangkatan.

Pembuktian dengan Kontradiksi: Bilangan Bulat Tidak Dapat Sekaligus Genap dan Ganjil

Selain pembuktian langsung terhadap operasi aritmetika, bilangan genap dan ganjil juga dapat digunakan untuk menjelaskan metode pembuktian dengan kontradiksi. Metode ini dilakukan dengan mengasumsikan bahwa pernyataan yang hendak dibuktikan adalah salah, kemudian menunjukkan bahwa asumsi tersebut menghasilkan pertentangan.

Pernyataan yang akan dibuktikan adalah tidak ada bilangan

bulat yang sekaligus genap dan ganjil. Untuk membuktikannya, andaikan terdapat bilangan bulat x yang sekaligus genap dan ganjil. Karena x merupakan bilangan genap, terdapat bilangan bulat m sehingga: x = 2m Namun, karena x juga dianggap sebagai bilangan ganjil, terdapat bilangan bulat n sehingga; x = 2n + 1 Karena kedua bentuk tersebut menyatakan bilangan yang sama, diperoleh:

2m = 2n + 1

2m - 2n = 1

2(m - n) = 1

Karena m dan n merupakan bilangan bulat, m - n juga merupakan bilangan bulat. Oleh karena itu, ruas kiri berbentuk dua kali bilangan bulat sehingga harus merupakan bilangan genap. Akan tetapi, ruas kanan bernilai 1 yang merupakan bilangan ganjil. Hal ini menimbulkan pertentangan karena suatu bilangan tidak dapat sekaligus genap dan ganjil.

Dengan demikian, asumsi awal bahwa terdapat bilangan bulat yang sekaligus genap dan ganjil adalah salah. Terbukti bahwa setiap bilangan bulat termasuk dalam salah satu kategori, yaitu genap atau ganjil, dan tidak mungkin termasuk keduanya sekaligus. Pembuktian tersebut menunjukkan bahwa metode kontradiksi dapat digunakan ketika asumsi yang berlawanan dengan pernyataan menghasilkan ketidakmungkinan secara matematis. Dalam contoh ini, pertentangan muncul dari sifat keterbagian oleh dua dan definisi bilangan genap serta ganjil.

Analisis Pembuktian dengan Kontraposisi

Metode kontraposisi merupakan metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan suatu implikasi melalui pernyataan kontraposisinya. Jika pernyataan awal berbentuk “jika P, maka Q”, kontraposisinya berbentuk “jika bukan Q, maka bukan P”. Kedua pernyataan tersebut memiliki nilai kebenaran yang setara. Sebagai contoh, pernyataan “jika kuadrat suatu bilangan bulat merupakan bilangan ganjil, maka bilangan tersebut ganjil” dapat dibuktikan melalui kontraposisi. Kontraposisinya adalah “jika suatu bilangan bulat genap, maka kuadratnya genap”. Misalkan bilangan bulat tersebut adalah 2m. Kuadratnya dapat ditulis sebagai:

(2m)^2 = 4m^2

= 2(2m^2)

Karena 2m^2 merupakan bilangan bulat, hasil kuadrat tersebut berbentuk 2k. Dengan demikian, kuadrat bilangan genap adalah bilangan genap. Oleh karena itu, kontraposisi dari pernyataan tersebut terbukti benar. Berdasarkan kesetaraan logis antara suatu implikasi dan kontraposisinya, pernyataan awal juga terbukti benar.

Analisis ini menunjukkan bahwa metode kontraposisi dapat mempermudah pembuktian apabila pernyataan yang diberikan lebih mudah dibuktikan melalui kondisi kebalikannya. Meskipun demikian, pemilihan metode tetap harus disesuaikan dengan bentuk pernyataan dan definisi yang digunakan.

Perbandingan Metode Pembuktian Matematis

Pembuktian langsung, kontraposisi, dan kontradiksi memiliki karakteristik yang berbeda. Pembuktian langsung dimulai dari informasi yang diketahui dan menggunakan definisi serta operasi aljabar untuk memperoleh kesimpulan. Metode ini sesuai untuk membuktikan sifat operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian bilangan genap dan ganjil. Pembuktian kontraposisi dilakukan dengan membuktikan pernyataan kebalikan dari implikasi yang diberikan. Metode ini dapat digunakan ketika kondisi yang berlawanan dengan kesimpulan lebih mudah dianalisis. Sementara itu, pembuktian kontradiksi dilakukan dengan mengasumsikan bahwa pernyataan yang akan dibuktikan salah, kemudian menunjukkan bahwa asumsi tersebut menghasilkan pertentangan. Ketiga metode tersebut mempunyai tujuan yang sama, yaitu menunjukkan kebenaran suatu pernyataan melalui penalaran yang dapat dipertanggungjawabkan.

Perbedaannya terletak pada strategi yang digunakan untuk mencapai kesimpulan. Oleh sebab itu, pemahaman terhadap beberapa metode pembuktian dapat membantu seseorang menentukan pendekatan yang paling sesuai untuk menyelesaikan suatu permasalahan matematika.

Dalam pembuktian sifat bilangan genap dan ganjil, pembuktian langsung cenderung lebih sederhana karena definisi kedua bilangan dapat langsung digunakan dalam bentuk aljabar. Namun, metode kontraposisi dan kontradiksi tetap penting untuk

memperluas pemahaman mengenai struktur penalaran matematis. Dengan mempelajari berbagai metode tersebut, pembaca dapat memahami bahwa suatu pernyataan matematika tidak hanya perlu menghasilkan kesimpulan yang benar, tetapi juga harus memiliki alasan yang logis.

Kesalahan yang Perlu Dihindari dalam Pembuktian Bilangan Genap dan Ganjil

Pembuktian matematis membutuhkan ketelitian dalam menggunakan definisi, operasi aljabar, dan penarikan kesimpulan. Salah satu kesalahan yang dapat terjadi adalah menganggap beberapa contoh numerik sudah cukup untuk membuktikan suatu pernyataan secara umum. Misalnya, contoh 2 + 4 = 6 dan 6 + 8 = 14 menunjukkan bahwa beberapa pasangan bilangan genap menghasilkan bilangan genap. Akan tetapi, contoh tersebut belum membuktikan bahwa sifat itu berlaku untuk seluruh pasangan bilangan genap. Pembuktian menggunakan bentuk umum 2m dan 2n diperlukan untuk menunjukkan sifat tersebut secara umum. Kesalahan berikutnya adalah penggunaan bentuk aljabar yang tidak sesuai dengan definisi. Bilangan genap harus dinyatakan dalam bentuk 2n, sedangkan bilangan ganjil harus dinyatakan dalam bentuk 2n + 1, dengan n merupakan bilangan bulat. Apabila bentuk umum tersebut digunakan secara tidak tepat, kesimpulan yang diperoleh dapat menjadi tidak valid. Kesalahan juga dapat muncul ketika melakukan operasi penjumlahan, pengurangan, atau perkalian. Sebagai contoh, perkalian dua bilangan ganjil harus dikembangkan dengan benar sebagai berikut:

$$(2m + 1)(2n + 1)$$
$$= 4mn + 2m + 2n + 1$$
$$= 2(2mn + m + n) + 1$$

Bentuk akhirnya adalah 2k + 1, bukan 2k. Oleh karena itu, hasil kali dua bilangan ganjil merupakan bilangan ganjil, bukan bilangan genap. Ketelitian dalam mengembangkan bentuk aljabar menjadi hal penting agar kesimpulan sesuai dengan pernyataan yang dibuktikan.

Selain itu, pada pembuktian kontradiksi, pertentangan harus ditunjukkan dengan jelas. Tidak cukup hanya menyatakan bahwa asumsi awal salah tanpa menjelaskan alasan matematisnya. Dalam pembuktian bahwa tidak ada bilangan bulat yang sekaligus genap dan ganjil, pertentangan diperoleh ketika suatu

bentuk harus merupakan bilangan genap, tetapi disamakan dengan bilangan ganjil.

Berdasarkan uraian tersebut, ketelitian dalam pembuktian tidak hanya berkaitan dengan kemampuan menghitung, tetapi juga dengan kemampuan memahami definisi, menjaga konsistensi simbol, dan menyusun argumen secara runtut. Setiap langkah harus dapat dijelaskan dan mendukung kesimpulan akhir.

Implikasi Pembuktian Bilangan Genap dan Ganjil terhadap Penalaran Matematis

Pembuktian sifat bilangan genap dan ganjil memberikan kesempatan untuk memahami hubungan antara definisi matematika dan proses penalaran. Dalam kegiatan pembuktian, seseorang harus mampu mengubah definisi ke dalam bentuk simbol, melakukan manipulasi aljabar, serta menilai apakah kesimpulan yang diperoleh benar-benar mengikuti langkah sebelumnya. Proses tersebut juga membantu membedakan antara kegiatan menghitung dan kegiatan membuktikan. Menghitung biasanya bertujuan memperoleh hasil dari bilangan tertentu, sedangkan pembuktian bertujuan menjelaskan alasan suatu pernyataan berlaku secara umum. Sebagai contoh, menghitung 3 + 5 = 8 hanya memberikan hasil untuk satu pasangan bilangan ganjil. Sebaliknya, pembuktian menggunakan bentuk 2m + 1 dan 2n + 1 menunjukkan bahwa jumlah setiap pasangan bilangan ganjil selalu genap.

Penggunaan variabel juga memperkenalkan gagasan generalisasi dalam matematika. Variabel m dan n tidak mewakili satu bilangan tertentu, tetapi dapat mewakili berbagai bilangan bulat sesuai dengan asumsi yang ditetapkan.

Dengan demikian, pembuktian aljabar memungkinkan suatu sifat dinyatakan secara lebih luas. Selain itu, pemahaman terhadap bilangan genap dan ganjil dapat menjadi dasar untuk mempelajari materi matematika lainnya, seperti keterbagian bilangan, pola bilangan, teori bilangan, dan logika matematika. Konsep sederhana ini dapat digunakan untuk memperkenalkan cara menyusun argumen yang sistematis sebelum mempelajari pembuktian yang lebih kompleks. Pembahasan ini juga menunjukkan bahwa pemilihan metode pembuktian memiliki peranan penting. Pembuktian langsung dapat

digunakan ketika kesimpulan mudah diperoleh dari definisi dan operasi aljabar. Kontraposisi dapat digunakan ketika pernyataan kebalikannya lebih mudah dibuktikan, sedangkan kontradiksi dapat digunakan ketika asumsi yang berlawanan menghasilkan pertentangan. Pemahaman terhadap perbedaan tersebut membantu meningkatkan ketepatan dalam menyusun pembuktian.

Sifat Keterbagian (Divisibility) Bilangan Genap dan Bilangan Ganjil

Keterbagian (divisibility) merupakan konsep dalam teori bilangan yang berkaitan dengan kemungkinan suatu bilangan dibagi oleh bilangan lain tanpa menghasilkan sisa. Untuk bilangan bulat a dan b, dengan $a \neq 0$, dinyatakan bahwa a membagi b, ditulis $a \mid b$, apabila terdapat bilangan bulat k sehingga $b = ak$. Berdasarkan definisi ini, bilangan genap merupakan bilangan bulat yang habis dibagi dua, sedangkan bilangan ganjil merupakan bilangan bulat yang tidak habis dibagi dua dan dapat dinyatakan dalam bentuk $2n + 1$, dengan $n \in Z$ (Hammack, 2018; Levin, 2024).

1. Bilangan genap habis dibagi dua: Misalkan a merupakan bilangan genap. Berdasarkan definisi bilangan genap, terdapat bilangan bulat k sehingga $a = 2k$. Dengan demikian, $2 \mid a$, yang berarti bahwa a habis dibagi dua. Sebagai contoh, $12 = 2(6)$, sehingga $2 \mid 12$. Sifat ini berlaku untuk setiap bilangan bulat genap, termasuk bilangan genap negatif dan nol.
2. Bilangan ganjil tidak habis dibagi dua: Misalkan b merupakan bilangan ganjil. Berdasarkan definisinya, terdapat bilangan bulat n sehingga $b = 2n + 1$. Apabila b dibagi dua, diperoleh $b/2 = n + 1/2$. Karena n merupakan bilangan bulat, maka $n + 1/2$ bukan bilangan bulat. Oleh karena itu, b tidak habis dibagi dua. Sebagai contoh, $7 = 2(3) + 1$, sehingga 7 tidak habis dibagi dua tanpa sisa. Dengan demikian, setiap bilangan bulat ganjil memiliki sisa satu ketika dibagi dua.
3. Perkalian bilangan genap dengan bilangan bulat

menghasilkan bilangan genap Misalkan a merupakan bilangan genap dan b merupakan bilangan bulat. Karena a genap, terdapat m ∈ Z sehingga a = 2m. Hasil perkalian kedua bilangan tersebut adalah ab = (2m)b = 2(mb). Karena m dan b merupakan bilangan bulat, maka mb ∈ Z. Dengan demikian, ab berbentuk 2k sehingga merupakan bilangan genap. Hal ini membuktikan bahwa perkalian bilangan genap dengan bilangan bulat apa pun selalu menghasilkan bilangan genap.

4. Hasil kali dua bilangan ganjil tidak habis dibagi dua: Misalkan a dan b merupakan bilangan ganjil. Berdasarkan definisinya, terdapat m, n ∈ Z sehingga a = 2m + 1 dan b = 2n + 1. Hasil perkaliannya adalah:(2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1= 2(2mn + m + n) + 1 Karena 2mn + m + n merupakan bilangan bulat, hasil perkalian tersebut berbentuk 2k + 1. Oleh karena itu, hasil kali dua bilangan ganjil tetap ganjil dan tidak habis dibagi dua.
5. Analisis sifat keterbagian bilangan genap dan ganjil Berdasarkan pembuktian tersebut, sifat keterbagian oleh dua dapat digunakan untuk membedakan bilangan genap dan ganjil secara matematis. Bilangan genap dapat dinyatakan sebagai kelipatan dua, sedangkan bilangan ganjil memiliki bentuk satu lebih besar daripada suatu kelipatan dua. Perbedaan ini menjelaskan mengapa hasil perkalian yang melibatkan bilangan genap selalu genap, sedangkan hasil perkalian dua bilangan ganjil selalu ganjil.Konsep keterbagian memperkuat pembahasan mengenai pembuktian matematis karena setiap kesimpulan diperoleh melalui definisi dan manipulasi aljabar, bukan hanya berdasarkan contoh numerik. Dengan demikian, sifat keterbagian merupakan salah satu dasar untuk memahami hubungan antara

bilangan genap, bilangan ganjil, dan struktur bilangan bulat dalam teori bilangan.

D. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa pembuktian matematis merupakan bagian penting dalam matematika karena digunakan untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan secara logis dan sistematis. Pada pembahasan mengenai bilangan genap dan bilangan ganjil, pembuktian dilakukan dengan menggunakan definisi dasar bahwa bilangan genap merupakan bilangan bulat yang dapat dinyatakan dalam bentuk 2n, sedangkan bilangan ganjil dapat dinyatakan dalam bentuk 2n + 1, dengan n merupakan bilangan bulat. Definisi tersebut menjadi dasar untuk membuktikan berbagai sifat operasi bilangan genap dan ganjil.

Hasil pembuktian menunjukkan bahwa penjumlahan dua bilangan genap menghasilkan bilangan genap, penjumlahan dua bilangan ganjil menghasilkan
bilangan genap, sedangkan penjumlahan bilangan genap dan bilangan ganjil menghasilkan bilangan ganjil. Pada operasi pengurangan, dua bilangan genap yang dikurangkan menghasilkan bilangan genap, begitu pula dua bilangan ganjil.

Sementara itu, pengurangan bilangan genap dengan bilangan ganjil menghasilkan bilangan ganjil, dan pengurangan bilangan ganjil dengan bilangan genap juga menghasilkan bilangan ganjil. Pada operasi perkalian, perkalian dua bilangan genap menghasilkan bilangan genap, perkalian bilangan genap dan bilangan ganjil menghasilkan bilangan genap, sedangkan perkalian dua bilangan ganjil menghasilkan bilangan ganjil. Sifat-sifat tersebut dapat dibuktikan melalui manipulasi bentuk aljabar berdasarkan definisi bilangan genap dan ganjil.

Selain itu, pembuktian secara langsung, pembuktian dengan kontraposisi, dan pembuktian dengan kontradiksi dapat digunakan sesuai dengan karakteristik pernyataan yang ingin dibuktikan. Pembuktian langsung dilakukan dengan mengembangkan definisi dan sifat yang telah diketahui, sedangkan pembuktian dengan kontraposisi dilakukan dengan membuktikan pernyataan kebalikannya yang ekuivalen secara logis. Adapun

pembuktian dengan kontradiksi dilakukan dengan mengasumsikan bahwa pernyataan yang ingin dibuktikan salah, kemudian menunjukkan bahwa asumsi tersebut menimbulkan pertentangan. Penggunaan Metode-metode tersebut membantu memperjelas alasan logis di balik kebenaran suatu pernyataan matematika.

Dengan demikian, pembuktian sifat bilangan genap dan ganjil tidak hanya bertujuan untuk memperoleh hasil yang benar, tetapi juga untuk melatih kemampuan berpikir logis, kritis, dan sistematis. Pemahaman terhadap definisi, ketepatan dalam melakukan manipulasi aljabar, serta kemampuan menyusun alasan yang runtut merupakan hal penting dalam membangun pembuktian matematis yang baik. Oleh karena itu, materi pembuktian bilangan genap dan ganjil dapat menjadi dasar untuk mempelajari pembuktian pada materi matematika yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

Daftar Pustaka ditulis mengacu kepada standar APA 6th dengan panduan sebagai berikut :

Buku :

Doerr, A., & Levasseur, K. (2017). _Applied discrete structures: Part 1—Fundamentals_. Lulu Press. https://discretemath.org/

Hammack, R. (2018). _Book of proof_ (3rd ed.). Richard Hammack. https://richardhammack.github.io/BookOfProof/

Levin, O. (2024). _Discrete mathematics: An open introduction_ (4th ed.). https://discrete.openmathbooks.org/dmoi4.html

Sumber Darinhg :

Stony Brook University, Department of Computer Science. (n.d.). Proof techniques. Retrieved from https://www3.cs.stonybrook.edu/~pramod.ganapathi/doc/discrete-mathematics/prooftechniques.html

University of Minnesota, Open Textbook Library. (n.d.). Discrete mathematics: An open introduction (4th ed.). Retrieved from https://open.umn.edu/opentextbooks/textbooks/discrete-mathematics-an-open-introduction

Even and odd integers. (n.d.). In _Logical thinking through discrete mathematics_. Retrieved from https://louis.pressbooks.pub/discretemathematics/chapter/integers/

Proofs. (n.d.). In _Discrete mathematics: An open introduction_ (4th ed.). Retrieved from https://discrete.openmathbooks.org/dmoi4/sec_logic-proofs.html

Jurnal :

Davies, B., Alcock, L., & Jones, I. (2021). What do mathematicians mean by proof? A comparative-judgement study of students' and mathematicians' views. _The Journal of Mathematical Behavior, 61_, 100824. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100824

Faizah, S., Nusantara, T., Sudirman, S., & Rahardi, R. (2020). Exploring students' thinking process in mathematical proof of abstract algebra based on Mason's framework. _Journal for the Education of Gifted Young Scientists, 8_(2), 871–884. https://doi.org/10.17478/jegys.689809

Herizal, H., Suhendra, S., & Nurlaelah, E. (2020). Pengaruh kemampuan memahami bukti matematis terhadap kemampuan mengonstruksi bukti matematis pada topik trigonometri. _Suska Journal of Mathematics Education, 6_(1), 17–24. https://doi.org/10.24014/sjme.v6i1.8115

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. _Educational Studies in Mathematics, 94_, 223–239. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9720-9

Rocha, H. (2019). Mathematical proof: From mathematics to school mathematics. _Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 377_(2140), 20180045. https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0045